Meccanica applicata

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

APPUNTI

www.mastercopy.com
035/831226 - 388/9837745

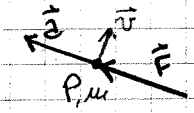
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

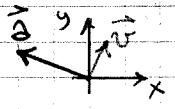
MASTER COPY

Tel. 388/9837745

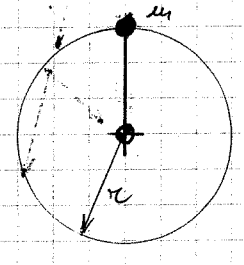
DINAMICA

Centrale in dinamica è il concetto di FORZA. La forza è un vettore applicato, a differenza della velocità e della accelerazione, che sono vettori liberi.
A rendere il vettore $\vec{a}$ applicato al punto materiale P è proprio il prodotto per la massa, analogamente al caso della quantità di moto ($\vec{Q} = m\vec{v}$)





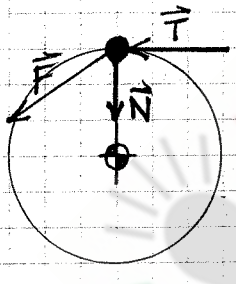
Molto spesso il moto di un punto materiale non è libero, ma vincolato.



Se considero ad esempio un punto materiale di massa m attaccato ad una sbarretta di lunghezza r, a sua volta incernierata al telaio, posso osservare che questo sarà vincolato a seguire una traiettoria circolare.

➡ FONDAMENTALE: la risultante delle forze deve passare per il punto materiale.

Modifico il problema: aggiungo una forza $\vec{T}$ tangenziale



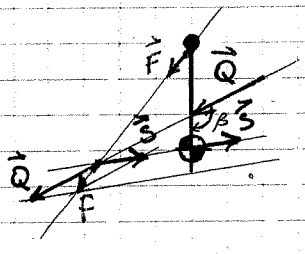
La velocità del punto ha componente solo tangenziale alla traiettoria, mentre l'accelerazione ha componente anche normale.

➡ FONDAMENTALE: ad ogni forza corrisponde sempre una accelerazione e viceversa.

Per questo motivo ci dovrà essere una forza normale $\vec{N}$. In definitiva avrò le seguenti relazioni:

$$\vec{a}_t = \dot{v}\hat{t}\ ,\quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\hat{n}\ ,\quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\ ;\quad \vec{T} = m\vec{a}_t\ ,\quad \vec{N} = m\vec{a}_n\ ,\quad \vec{F} = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n$$

Apporto ora una ulteriore modifica: elimino $\vec{T}$ e applico una forza $\vec{Q}$, non più sul punto ma sulla sbarra, con un angolo β costante.

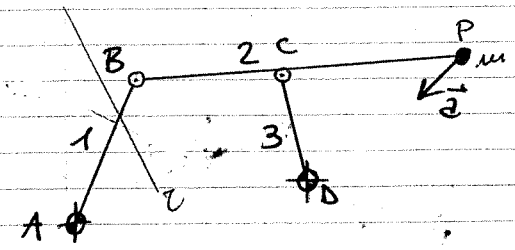


Procedendo graficamente, devo ricordarmi che la risultante di $\vec{Q}$ e della reazione $\vec{S}$ della cerniera deve passare per il punto

Devo tenere presente però che $\vec{F}$ è associata all'accelerazione complessiva del punto, quindi ha ancora una componente normale ed una tangenziale. Le condizioni iniziali (spostamento e velocità) dovranno quindi essere date compatibilmente con tale configurazione.

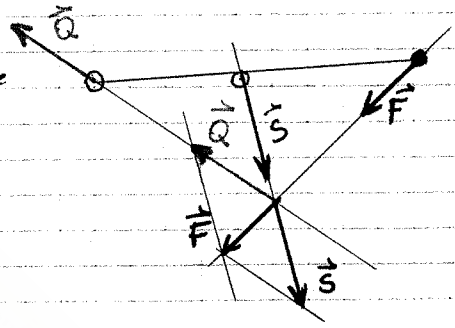
Oss: dopo aver effettuato un giro completo la componente $\vec{N}$ sarà aumentata, mentre la $\vec{T}$ sarà invariata, perché dipendente solo dalla forza $\vec{Q}$, costante nel tempo.

Considero ora un meccanismo, detto QUADRILATERO ARTICOLATO, con un punto materiale attaccato ad un estremo dell'asta 2.

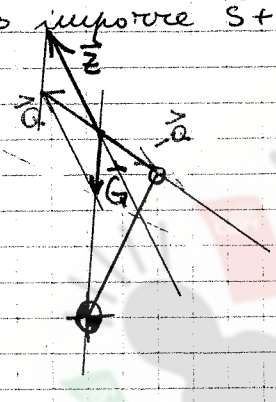


Suppongo di conoscere l'accelerazione $\vec{a}$ di P. Mi chiedo che forza devo applicare al corpo 1 perché il punto P si muova proprio con accelerazione $\vec{a}$, sapendo che la retta di azione è r (data).

È necessario analizzare singolarmente i corpi. Considero il corpo 2. Su di esso agisce sicuramente la forza $\vec{F}=m\vec{a}$ e agiscono le reazioni vincolari delle due cerniere.
$\vec{F}$ ha direzione nota; la reazione $\vec{S}$ dovuta alla cerniera in C ha direzione parallela alla sbarra 3 (questa è in moto, ma non avendo inerzia è scarica) quindi posso trovare la reazione $\vec{Q}$ in A.



NOTA: devo imporre $\vec{S}+\vec{Q}=\vec{F}$



$\vec{z}+\vec{G}-\vec{Q}=0$

$\Updownarrow$

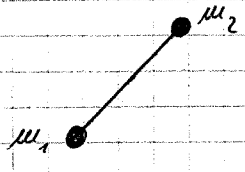
$\vec{Q}=\vec{z}+\vec{G}$

Ora posso considerare il corpo 1

In questo caso non è importante l'intensità dei vari vettori forza o accelerazione, quanto la direzione. Se infatti raddoppio il modulo di $\vec{a}$, tutte le forze raddoppiano in modulo, ma la geometria non cambia.

•) CORPO RIGIDO

Nel piano, qualunque corpo rigido può essere schematizzato come una bacchetta collegata a due masse.



Le quantità scalari che definiscono univocamente il comportamento dinamico di un corpo rigido sono 4:

•) masse

•) momento d'inerzia (rispetto al baricentro)

•) posizione del baricentro (2 quantità)

Per lo studio del corpo rigido (e non solo) sono fondamentali le due equazioni CARDINALI della dinamica, che garantiscono l'equilibrio dinamico alla traslazione ed alla rotazione

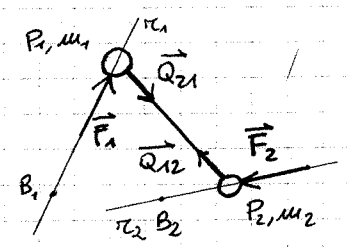
I) $m\vec{a}_G=\vec{R}$

II) $\dot{\vec{K}}_A+\vec{v}_A\wedge m\vec{v}_G=\vec{M}_A$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745
0414

Tuttavia, dal punto di vista applicativo, questa formulazione della 2ª cardinale non è molto utile. Esistono però altri modi per esprimerla.

Considero un corpo rigido



$\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono forze esterne, $\vec{Q}_{12}$ e $\vec{Q}_{21}$ sono forze interne.

Dette r_1 e r_2 due rette passanti per P_1 e P_2, devo imporre che $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ passino per i punti, considero allora $B_1 \in r_1$ e $B_2 \in r_2$ ed impongo la condizione di parallelismo.

$$B_1P_1 \wedge \vec{F}_1 = 0 \quad ; \quad B_2P_2 \wedge \vec{F}_2 = 0$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745
-0414

Dalla 1ª cardinale posso ricavare le seguenti relazioni

$$\vec{F}_1 + \vec{Q}_{21} = m\vec{a}_1 \quad ; \quad \vec{F}_2 + \vec{Q}_{12} = m\vec{a}_2$$

Sommando le due e applicando il terzo principio, arrivo alla 1ª cardinale del sistema

$$m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \iff m\vec{a}_G = \vec{R} \quad , \text{ dove } \vec{a}_G = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$$

Per ottenere la 2ª cardinale prendo un punto arbitrario A (generalmente mobile) e premoltiplico vettorialmente i membri della 1ª per il vettore che parte da A ed arriva al punto di applicazione di ogni forza

$$AP_1 \wedge m\vec{a}_1 + AP_2 \wedge m\vec{a}_2 = \underbrace{AP_1 \wedge \vec{F}_1 + AP_2 \wedge \vec{F}_2}_{\vec{M}_A} \qquad [1]$$

Questa espressione è valida per qualsiasi sistema; non ho infatti sfruttato la condizione di corpo rigido.

Considero il punto A. Esso può avere una accelerazione $\vec{a}_A$, allora

$$AP_1 \wedge m_1 \underbrace{(\vec{a}_1 - \vec{a}_A)}_{\vec{a}_1^r} + AP_2 \wedge m_2 \underbrace{(\vec{a}_2 - \vec{a}_A)}_{\vec{a}_2^r} + AP_1 \wedge m_1\vec{a}_A + AP_2 \wedge m_2\vec{a}_A = \vec{M}_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{AP_1 \wedge m_1\vec{a}_1^r + AP_2 \wedge m_2\vec{a}_2^r}_{\dot{\vec{K}}_A^r} + \underbrace{(m_1AP_1 + m_2AP_2)}_{m \cdot AG} \wedge \vec{a}_A = \vec{M}_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{K}}_A^r + AG \wedge m\vec{a}_A = \vec{M}_A}$$

È corretto aver chiamato quella espressione $\dot{\vec{K}}_A^r$? So che

$$\vec{K}_A^r = AP_1 \wedge m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_A) + AP_2 \wedge m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_A)$$

$$\dot{\vec{K}}_A^r = \cancel{(\vec{v}_1 - \vec{v}_A) \wedge m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_A)} + AP_1 \wedge m_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_A) + \cancel{(\vec{v}_2 - \vec{v}_A) \wedge m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_A)} + AP_2 \wedge m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_A) =$$

$$= AP_1 \wedge m_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_A) + AP_2 \wedge m_2(\vec{a}_2 - \vec{a}_A)$$

Con questa formulazione posso calcolare $\vec{K}_A$ come se A fosse fermo; se poi non lo è, allora aggiungo il termine $AG \wedge m\vec{a}_A$.
Nel caso di problemi piani, la formula di $\dot{\vec{K}}_A^r$ si semplifica e si ha